Bestimme jeweils Hoch-, Tiefpunkt und Wendepunkt.

1. $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-3)$

Ausmultiplizieren: $f(x) = \frac{1}{4}(x^2+x-2x-2)(x-3)$

$$= \frac{1}{4}(x^2-x-2)(x-3)$$

$$= \frac{1}{4}(x^3-x^2-2x-3x^2+3x+6)$$

$$= \frac{1}{4}(x^3-4x^2+x+6)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

Ableiten: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

HP / TP: notw. Bed. $f'(x) = 0$

$\frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \quad | : \frac{3}{4}$ vorbereiten für p-q-Formel

$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \quad | \; p = -\frac{8}{3} \quad q = \frac{1}{3}$

$-\frac{p}{2} = -\frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$ !

$x_{1/2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}} \qquad x_1 = 2{,}535 \quad x_2 = 0{,}131$

y-Werte: $f(0{,}13) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}13^3 - 0{,}13^2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}13 + \frac{3}{2} \approx 1{,}52$

$f(2{,}535) \approx -0{,}22$

$H(0{,}13 \mid 1{,}52) \qquad T(2{,}54 \mid -0{,}22)$ Prüfung mit $f''(x)$ folgt später!

Wendepunkt: notw. Bed. $f''(x) = 0$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 2 \qquad \frac{3}{2}x - 2 = 0 \quad | : \frac{3}{2} \qquad x - \frac{4}{3} = 0 \quad | + \frac{4}{3}$

$x = \frac{4}{3} \approx 1{,}33 \qquad$ y-Wert ($x$ in $f(x)$) $\quad f(1{,}33) \approx 0{,}65$

$W(1{,}33 \mid 0{,}65)$

2) $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$ ausmultiplizieren

$=\frac{1}{3}(x^2-2x+1)(x-3)$

$=\frac{1}{3}(x^3-3x^2-2x^2+6x+x-3)$

$=\frac{1}{3}(x^3-5x^2+7x-3)$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{7}{3}x-1$

HP/TP: notw. Bed. $f'(x)=0$

$f'(x)=x^2-\frac{10}{3}x+\frac{7}{3}=0 \quad | \quad p=-\frac{10}{3} \quad q=\frac{7}{3}$

$x_{1/2}=\frac{5}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-\frac{7}{3}} \qquad x_1=2\frac{1}{3}\approx 2{,}33 \quad x_2=1$

y-Werte: $f(1)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{5}{3}\cdot 1^2+\frac{7}{3}\cdot 1-1=0 \qquad H(1|0)$

$f(2{,}33)\approx -0{,}40 \qquad T(2{,}33|-0{,}40)$

Untersuchung per Rechnung: HP/TP unterscheiden folgt später

Wendepunkt: notw. Bed. $f''(x)=0$

$f''(x)=2x-\frac{10}{3}=0 \quad |:2 \quad x-\frac{5}{3}=0 \quad |+\frac{5}{3} \quad x=\frac{5}{3}=1{,}\overline{6}$

y-Wert: $f(1{,}\overline{6})\approx -0{,}20 \qquad W(1{,}67|-0{,}20)$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 2$

EP: notw. Bed. $f'(x) = 0$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad p = -4 \quad q = 4$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = 2 \pm 0 \qquad x_1 = x_2 = 2$$

Prüfe $f''(x)$ auf Sattelpunkt, da $x_1 = x_2$ ist.

$$f''(x) = 2x - 4 \qquad f''(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt!

y-Wert: $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 2 \approx 0{,}67$

$S(2 | 0{,}67)$